Ορισμός: $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x)\cdot f(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx$ (για το παρόν παράδειγμα αφού g(x)=πραγματική συνάρτηση)

11/10/2016

Ιδιότητες (Εσωτερικού Γινομένου ↑)

1) $\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^*$

απόδ.: $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x)f(x)\,dx = \int_a^b \left(f^*(x)g(x)\right)^* dx = \langle f|g\rangle^*$

Σημείωση: Όλα απλουστεύονται στις πραγματικές συναρτήσεις.

2) $|H\rangle = \lambda_1|f\rangle + \lambda_2|g\rangle$ ή $H(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$

$\langle F|H\rangle = \lambda_1\langle F|f\rangle + \lambda_2\langle F|g\rangle$

απόδ.: $\langle F|H\rangle = \int_a^b F^*(x)H(x)\,dx = \int_a^b F^*(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,dx$

$= \lambda_1\int_a^b F^*(x)f(x)\,dx + \lambda_2\int_a^b F^*(x)g(x)\,dx = \lambda_1\langle F|f\rangle + \lambda_2\langle F|g\rangle$

Όμοια για τις υπόλοιπες ιδιότητες.

Η ανισότητα Schwarz

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων, $|a\rangle$ & $|b\rangle \in S$ ισχύει ότι:

$\|a\|\cdot\|b\| \geq |\langle b|a\rangle|$ ή $\sqrt{\langle a|a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b|b\rangle} \geq |\langle b|a\rangle|$

Παρατήρηση: Στον Ευκλείδειο χώρο η ιδιότητα αυτή προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και είναι απόρροια του ότι το $|\cos\theta| \leq 1$. (Βασική ανισότητα στην απόδ. διαφόρων προτάσεων)

Απόδ.: Αν $\langle b|a\rangle = 0$, τότε η πρόταση είναι προφανής.

Γενικότερα, όταν $\langle b|a\rangle \neq 0$, τότε θεωρούμε το

$|c\rangle = |a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle|b\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\langle c|c\rangle \geq 0$, $\langle c|c\rangle = \langle c|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle c|b\rangle =$

$\langle a|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle a|b\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle b|a\rangle + \lambda^2\langle b|a\rangle^2\langle b|b\rangle$

Επομένως, το $\langle c|c\rangle$ θα μας δώσει μία συνάρτηση $f(\lambda)$, όπου

$f(\lambda) = \langle c|c\rangle = \langle a|a\rangle - 2\lambda|\langle b|a\rangle|^2 + \lambda^2|\langle b|a\rangle|^2\langle b|b\rangle \geq 0$

Πρέπει λοιπόν η $\Delta \leq 0$. δηλ.,

$4|\langle b|a\rangle|^4 - 4|\langle b|a\rangle|^2\langle b|b\rangle\langle a|a\rangle \leq 0 \Rightarrow$

$\langle b|b\rangle\langle a|a\rangle \geq |\langle b|a\rangle|^2 \Rightarrow \|b\|\|a\| \geq |\langle b|a\rangle|$. ■

Μ.Φ. 11/10/2016

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός: Τα διανύσματα $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**, αν $\lambda_1|x_1\rangle + \lambda_2|x_2\rangle + \ldots + \lambda_n|x_n\rangle = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$

Σε αντίθετη περίπτωση, λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα** & $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \neq 0$.

Π.Χ. 1 Τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, Έστω:
$\lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k} = 0$, τότε $\lambda_1 \langle \bar{i}|\bar{i}\rangle^{1} + \lambda_2 \cancel{\langle \bar{i}|\bar{j}\rangle}^{0} + \lambda_3 \cancel{\langle \bar{i}|\bar{k}\rangle}^{0} = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, όμοια και για λ_2, λ_3.

Π.Χ. 2 Τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3, x^4$.
Κάνουμε την αντιστοιχεία $|x_1\rangle = 1, |x_2\rangle = x, |x_3\rangle = x^2, \ldots, |x_5\rangle = x^4$.
Τα x_i, $i = 1, \ldots, 5$ είναι γραμ. ανεξάρτητα,
$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, όπου αυτό ισχύει μόνο όταν $a_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Ορισμός: Ένας δ.χ. λέγεται **N-διάστατος** ($N < \infty$) αν υπάρχουν N γραμμ. ανεξάρτητα διανύσματα, αλλά οποιαδήποτε N+1 διαν. είναι γραμ. εξαρτ.

Παρατήρηση: Αν για κάθε δοσμένο σύστημα διανυσμάτων $\{|x_i\rangle, i = 1, \ldots, N\}$, μπορώ να βρω τουλάχιστον ένα ακόμα γραμμικώς ανεξάρτητο διάνυσμα, $\forall N$, τότε ο χώρος είναι άπειρης διάστασης.

Ορισμός: Ένα σύνολο n διανυσμάτων γραμμικώς ανεξάρτητα $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ αποτελεί **βάση** του διανυσματικού χώρου (δ.χ.) S, αν κάθε $|x\rangle \in S$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $|x_i\rangle, i = 1, \ldots, n$.
Δηλ., $|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i\rangle$, τα a_i είναι οι συνιστώσες του $|x\rangle$ στη βάση $|x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$ και είναι μοναδικές.

Π.Χ. 1 Τα $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3$
Το διάνυσμα θέσης (δ.θ.) $\bar{r} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, x,y,z συνιστώσες του r.

Π.Χ. 2 Τα μονώνυμα $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ είναι μία βάση στο χώρο των πολ/μων βαθμού ≤ 3.
Κάθε πολ/μο γράφεται: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$

Θεώρημα: Αν n διανύσματα ενός n-διάστατου δ.χ. S είναι γραμμ. ανεξάρτητα, τότε αποτελούν μία βάση του S.

Παρατήρηση: Μία βάση λέγεται ορθοκανονική αν:

$$\langle x_i|x_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Διαδικασία Gram-Schmidt

Η μέθοδος που κατασκευάζει ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $|e_i\rangle$, ξεκινώντας από ένα σύστημα $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{\Lambda}$, λέγεται ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt (G-S).
Έστω $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{\Lambda}$ διανύσματα για χώρο N-διάστασης, με $\Lambda \geq N$, τότε

1) Κατασκευάζουμε τα $\langle x_i|x_j\rangle$, $i,j=1,\dots,N$, με αυθαίρετη αρίθμηση.
Αγνοώ τα διανύσματα $|x_i\rangle$ με $\langle x_i|x_i\rangle=0$.

2) Για το $|x_1\rangle$ κατασκευάζω το: $|e_1\rangle=\dfrac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$ ($e^{i\phi}$, όπου ϕ είναι μία αυθαίρετη φάση, μία καλή επιλογή για το ϕ είναι $\phi=0$.)
Τότε $\langle e_1|e_1\rangle=1$.

3) Τώρα το $|e_2\rangle=N_2(|x_2\rangle+b_{21}|e_1\rangle)$
Προσδιορίζω τις σταθερές N_2, b_{21}, με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου $\langle e_1|e_2\rangle=0$, $\langle e_2|e_2\rangle=1$.

Δηλ., $\langle e_1|e_2\rangle=0 \Rightarrow \langle e_1|x_2\rangle+b_{21}\overbrace{\cancel{\langle e_1|e_1\rangle}}^{1}=0\Rightarrow$

$$b_{21}=-\langle e_1|x_2\rangle=-\frac{\langle x_1|x_2\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$$

Επίσης: $\langle e_2|e_2\rangle=1\Rightarrow|N_2|^2\left(\langle x_2|x_2\rangle+b_{21}\langle x_2|e_1\rangle+b_{21}^{*}\langle e_1|x_2\rangle+|b_{21}|^2\overbrace{\cancel{\langle e_1|e_1\rangle}}^{1}\right)=1$ και υπολογίζω το N_2.

4) Ομοίως για το $|e_3\rangle = N_3(|x_3\rangle + b_{32}|e_2\rangle + b_{31}|e_1\rangle)$

$b_{3i} = -\langle e_i|x_3\rangle,\ i=1,2$

Όπ. $\langle e_3|e_3\rangle = 1 \Rightarrow$ Υπολογίζω το N_3.

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle x_3|x_3\rangle - |b_{32}|^2 - |b_{31}|^2}}$$

5) Τελικά για το $k+1$ ορθοκανονικό διάνυσμα έχουμε ότι

$$|e_{k+1}\rangle = N_{k+1}\left(|x_{k+1}\rangle + \sum_{i=1}^{k} b_{k+1,i}|e_i\rangle\right),$$

$$b_{k+1,i} = -\langle e_i|x_{k+1}\rangle,\ i=1,\dots,k$$

$$N_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\langle x_{k+1}|x_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k}|b_{k+1,i}|^2}}$$

Ορθογώνια Πολ/μα

Διαλέγω κατάλληλο διάστημα $[a,b]$, τη συνάρτηση βάρους $w(x)$ και τη ποσότητα N_n του ολοκληρώματος $\int_a^b w(x)[p_n(x)]^n dx = N_n$.

μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα κλασικά ορθογώνια πολ/μα με τη μέθοδο G-S.

Τέτοια πολ/μα είναι: Legendre $\{P_n(x)\}$, Chebyshev $\{T_n(x)\}$, Hermite $\{H_n(x)\}$, Laguerre $\{L_n^{\nu}(x)\}$ $\{L_n(x)\}$

Π.χ. Να κατασκευαστούν τα πολ/μα Legendre, $P_n(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$. Η βάση είναι (βάση μονωνύμων): $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i=1,2,\dots,N+1$

$\rightarrow$ Τότε $\langle x_m|x_n\rangle = \int_{-1}^{1} x^{m-1}\cdot x^{n-1}dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n-2}dx =$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{m+n-1}, & m+n \text{ άρτιος}, \geq 2 \\ 0, & m+n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

$\rightarrow$ Για να είναι ορθοκανονικά θα πρέπει όταν $m=n$ να έχω αποτέλεσμα 1. Όμως για $m=n$ έχω: $\frac{2}{2n-1} \neq 1$.

Άρα δεν είναι ορθοκανονικά, αλλά $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{m+n-1}$

Είναι: $|P_0\rangle = x^0 = 1 = P_0(x)$

$|P_1\rangle = x = P_1(x)$

$|P_2\rangle = \frac{1}{2}(3x^2-1)$.

* Η αρχική μας βάση μονωνύμων είναι η $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$
καταλήγω στο ότι δεν είναι ορθοκανονική.
κάνω G-S και βρίσκω $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$
τα τελευταία είναι ορθοκανονικά. (αν έχω άπειρα στο πλήθος, θα έχω μία βάση)

! Την προσπαθώ στο σπίτι.